確定的利用者均衡配分による移動時間信頼性評価手法に関する研究

北海道大学大学院工学研究院　内田　賢悦*
北海道大学大学院工学研究院　加賀屋　誠一

1. はじめに

これまで道路交通施策による効果として，移動時間短縮，移動費用削減および交通事故削減による便益が採用されてきたが，社会・経済活動の多様化・高度化に伴い，上述した便益以外に焦点を当てた議論が活発化している．移動時間信頼性向上による便益は，明らかに存在すると考えられながら，推計の困難性から，これまでとりあげられていない評価項目の 1 つであると考えられる．米国交通省では，政策決定者や道路利用者にわかりやすい時間信頼性指標をいくつか提案しており([1])，移動時間信頼性は，交通分野において世界的にも注目されつつある概念となっている([2])．

本研究では，実務における移動時間信頼性評価を念頭に，既に実用段階に達していると考えられる確定的利用者均衡配分を用いた移動時間信頼性評価手法を示す．この手法は，内田([3])で提案された数種の推計手法の 1 つに位置付けられ，移動時間信頼性への影響要因として交通容量の確率変動のみを考慮したモデルである．

2. 移動時間信頼性への影響要因と実務における適用可能性

ここでは，実務において適用可能，すなわち，大規模な道路ネットワークに適用可能な交通量配分に基づく移動時間信頼性評価手法ついて考察を加えることにする．一般的に，交通量配分に基づく移動時間信頼性評価手法は，扱う影響要因とドライバーの経路選択行動原則によって，特徴付けることができる．移動時間信頼性に影響を与える要因を整理すると，大別して，OD 交通量の変動，交通容量の変動，外的要因が挙げられる([1])．

確率的 OD 交通量を導入した手法は, 経路交通量のための記憶容量と移動時間信頼性に関する一意性の問題等, 実務での適用に際しては，解決されるべき課題がいくつか残されている．これに対して，確率的交通容量を導入し，経路選択行動を確定的利用者均衡によって表現した手法は，確率的交通容量の計測可能性も含め，概ね，課題は解決されつつあり，実務での適用可能性は高いと考えられる．

3. 移動時間信頼性評価のための均衡配分モデルの定式化

3.1　確率的交通容量

道路の交通容量は，天候，視界等，さまざまな要因によって日々変動していると考えられる．本研究では，リンク交通容量の平均および分散・共分散は計測可能であると仮定し，それが多変量正規分布 $\mathrm{MVN}\left(\mathbf{c}, \boldsymbol{\Sigma}^C\right)$ によって表されるものと考える．ここで，$\mathbf{c}, \boldsymbol{\Sigma}^C$ は，それぞれ a 番目の要素を c_a とするベクトル，a_1 行 a_2 列の要素を $\sigma^C_{a_1a_2} = \mathrm{cov}\left[C_{a_1}, C_{a_2}\right]$ とする行列であり，C_a はリンク a の確率的交通容量，c_a はその平均，$\sigma^C_{a_1a_2}$ は交通容量の分散・共分散である．

3.2　確率的移動時間

はじめに，リンク a の移動時間（t_a）は式(1)に示す交通容量の逆数（$\tilde{c}_a$）に関する多項式で表現される場合を考えよう．

$$t_a(v_a, \tilde{c}_a) = \sum_{i=0}^{m} b_{ia} \cdot (\tilde{c}_a)^i \ \forall a \in \mathbf{A}, \tag{1}$$

where

$$\tilde{c}_a = (c_a)^{-1}. \tag{2}$$

ここで，$\mathbf{A}$ はネットワーク上のリンク集合，v_a はリンク a の（平均）交通量，b_{ia} は v_a に関する関数である．式(1)に確率的交通容量の逆数（$\tilde{C}_a$）を代入すると，リンクの確率的移動時間（$\breve{T}_a$）は式(3)で与えられる．

$$\breve{T}_a = t_a(v_a, \tilde{C}_a) = \sum_{i=0}^{m} b_{ia} \cdot (\tilde{C}_a)^i \ \forall a \in \mathbf{A}, \tag{3}$$

where

$$\tilde{C}_a = (C_a)^{-1} \quad \forall a \in \mathbf{A}. \tag{4}$$

さらに，リンクの確率的移動時間の平均，分散・共分散を計算するために，$\tilde{C}_a = (\tilde{C}_a - \tilde{c}_a) + \tilde{c}_a$ として，式(3)に二項展開を施すと，確率的リンク移動時間は，式(5)が得られる．

$$\breve{T}_a = \sum_{i=0}^{m} \hat{b}_{ia} \cdot (\tilde{C}_a - \tilde{c}_a)^i \ \forall a \in \mathbf{A}, \tag{5}$$

where

$$\hat{b}_{ia} = \begin{cases} \sum_{j=0}^{m} b_{ja} \cdot (\tilde{c}_a)^j = t_a(v_a, \tilde{c}_a) & \text{if } i = 0 \\ \sum_{j=i}^{m} b_{ja} \cdot \dfrac{j!}{i! \cdot (j-i)!} \cdot (\tilde{c}_a)^{j-i} & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{6}$$

次に，リンク移動時間が式(7)で与えられる BPR 関数で表現される場合を考えよう．

$$t_a(v_a, \tilde{c}_a) = t_a^0 \cdot \left(1 + \gamma_a \cdot (v_a)^{\lambda_a} \cdot (\tilde{c}_a)^{\lambda_a}\right) \forall a \in \mathbf{A}. \tag{7}$$

t_a^0:　　リンク a の自由移動時間.

γ_a, λ_a:　パラメータ．

式(7)に確率的交通容量の逆数を代入すると，リンクの確率的移動時間（$\breve{T}_a$）は式(8)で与えられる．

$$\breve{T}_a = t_a(v_a, \tilde{C}_a) = t_a^0 \cdot \left(1 + \gamma_a \cdot (v_a)^{\lambda_a} \cdot (\tilde{C}_a)^{\lambda_a}\right) \forall a \in \mathbf{A}. \tag{8}$$

リンクの確率的移動時間の平均および分散・共分散を計算するため，式(8)に対して $\tilde{C}_a = \tilde{c}_a$ における m 次のテーラー展開を施すと，確率的リンク移動時間は，式(5)で与えられる．この場合，$\hat{b}_{ia}$ は式(9)で与えられることになる．

$$\hat{b}_{ia} = \frac{1}{i!} \cdot \left. \frac{\partial t_a{}^{(i)}(v_a, \tilde{C}_a)}{\partial (\tilde{C}_a)^{(i)}} \right|_{\tilde{C}_a = \tilde{c}_a}. \tag{9}$$

式(9)を実際に計算すると，式(10)で与えられる．

$$\hat{b}_{ia} = \begin{cases} t_a(v_a, \tilde{c}_a) & \text{if } i = 0 \\ \dfrac{\gamma \cdot t_a^0 \cdot \prod_{l=1}^{i} (\lambda - l + 1)}{i!} \cdot (v_a)^{\lambda} \cdot (\tilde{c}_a)^{\lambda - i} & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{10}$$

以上から，リンクの移動時間が BPR 関数で与えられた場合，確率的リンク移動時間は式(5)と同形式で表現可能であり，従来から指摘されているように，BPR 関数は式(1)に示した多項式関数の特殊形であることがわかる．こ

こで，式(5)に示した確率的リンク移動時間の平均（$\breve{t}_a$）を考えると，式(11)で与えられる．

$$\breve{t}_a = E\left[\breve{T}_a\right] = \sum_{i=0}^{m} \hat{b}_{ia} \cdot E\left[\left(\widetilde{C}_a - \widetilde{c}_a\right)^i\right] \quad \forall a \in \mathbf{A}. \tag{11}$$

また，確率的リンク移動時間の分散・共分散（$\sigma^T_{a_1 a_2}$）は，式(12)で与えられる．

$$\sigma^T_{a_1 a_2} = \mathrm{cov}\left[\breve{T}_{a_1}, \breve{T}_{a_2}\right] = E\left[\breve{T}_{a_1} \cdot \breve{T}_{a_2}\right] - \breve{t}_{a_1} \cdot \breve{t}_{a_2} \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbf{A}. \tag{12}$$

一方，OD ペア od 間の k 番目の経路に関する確率的移動時間（Ξ^{od}_k）は，式(13)で与えられる．

$$\Xi^{od}_k = \sum_{a \in \mathbf{A}} \breve{T}_a \cdot \delta^{od}_{ak} \quad \forall k \in \mathbf{K}_{od}, \forall od \in \mathbf{\Pi}. \tag{13}$$

$\mathbf{\Pi}$:　OD ペアの集合.

$\mathbf{K}_{od}$:　OD ペア od 間の経路集合.

δ^{od}_{ak}:　OD ペア od 間の k 番目経路にリンク a が含まれる場合 1，それ以外の場合に 0 をとる変数.

経路移動時間の平均（ξ^{od}_k）と分散・共分散（$\mathrm{cov}\left[\Xi^{od_1}_{k_1}, \Xi^{od_2}_{k_2}\right]$）は，それぞれ式(14)，(15)で与えられる．

$$\xi^{od}_k = E\left[\Xi^{od}_k\right] = \sum_{a \in \mathbf{A}} \breve{t}_a \cdot \delta^{od}_{ak} \quad \forall k \in \mathbf{K}_{od}, \forall od \in \mathbf{\Pi}. \tag{14}$$

$$\mathrm{cov}\left[\Xi^{od_1}_{k_1}, \Xi^{od_2}_{k_2}\right] = \mathrm{cov}\left[\sum_{a_1 \in \mathbf{A}} \breve{T}_{a_1} \cdot \delta^{od_1}_{a_1 k_1}, \sum_{a_2 \in \mathbf{A}} \breve{T}_{a_2} \cdot \delta^{od_2}_{a_2 k_2}\right] = \sum_{a_1 \in \mathbf{A}} \sum_{a_2 \in \mathbf{A}} \delta^{od_1}_{a_1 k_1} \cdot \delta^{od_2}_{a_2 k_2} \cdot \sigma^T_{a_1 a_2} \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbf{K}_{od}, \forall od_1, od_2 \in \mathbf{\Pi}. \tag{15}$$

確率的リンク移動時間の平均，分散・共分散（式(11)，(12)）が計算できれば（計算の詳細は，内田([3])を参照されたい)，確率的経路移動時間の平均，分散・共分散（式(14)，(15)）を求めることができる．そこで次節では，テーラー展開における次数と確率的リンク移動時間の平均，分散・共分散の関係を調べることにする．

3.3　テーラー展開における次数の影響

本研究では，ドライバーが経路の確率的移動時間の平均を評価基準として経路選択を行う場合を考えることにする. 移動時間信頼性や移動時間に関する認知誤差を反映した経路選択行動も考えられるが, これらに関しては, 内田([3])で詳しく論じられているため，以下では議論しないことにする．また，移動時間は，利用者均衡配分で一般的に適用される BPR 関数によって表現されるものとして議論を進めることにする．

式(8)に示した BPR 関数に $m(\geq 1)$ 次のテーラー展開を適用した場合を考えると, 確率的リンク移動時間の平均と分散・共分散は，それぞれ式(16)，(17)で与えられることになる（計算の詳細は，内田([3])を参照されたい)．

$$\breve{t}_a = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{m/2} \hat{b}_{2k,a} \cdot \left(\sigma^{\widetilde{C}}_{aa}\right)^k & m: \text{even number} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{(m-1)/2} \hat{b}_{2k,a} \cdot \left(\sigma^{\widetilde{C}}_{aa}\right)^k & m: \text{odd number} \end{cases} \quad \forall a \in \mathbf{A}. \tag{16}$$

$$\sigma^T_{a_1 a_2} = \left(\sum_{k=1}^{m} n^k_{a_1 a_2}\right) \cdot \delta t_{a_1} \cdot \delta t_{a_2} \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbf{A}, \tag{17}$$

where

$$n^k_{a_1 a_2} = k \cdot \frac{\prod_{l_1=1}^{k}\left(\lambda_{a_1} - l_1 + 1\right)}{k! \left(\widetilde{c}_{a_1}\right)^k} \cdot \frac{\prod_{l_2=1}^{k}\left(\lambda_{a_2} - l_2 + 1\right)}{k! \left(\widetilde{c}_{a_2}\right)^k} \cdot \left(\sigma^{\widetilde{C}}_{a_1 a_2}\right)^k. \tag{18}$$

式(17)は，確率的リンク移動時間の分散・共分散は，交通量配分前後の増分移動時間の積に，関係するリンクに

固有の係数（$\sum_{k=1}^{m} n_{a_1 a_2}^{k}$）が乗じられて表現されることを示している．ここで，確率的交通容量の分散・共分散に関する k 次のべき乗（$\left(\sigma_{a_1 a_2}^{\tilde{C}}\right)^k$）は，$k$ が大きくなると急激に 0 に近づくため，$n_{a_1 a_2}^{k}$ の高次項の影響も急激に小さくなることを付け加えておく．

ドライバーの経路選択行動にワードロップ第一原則の適用を仮定すると，1 次のテーラー展開を施した場合には，確定的利用者均衡配分として定式化されることになる．ここで留意しなければならないのは，テーラー展開において，高次の項まで表現した確率的リンク移動時間の平均と分散・共分散と比較して，1 次のテーラー展開を施した結果には，どの程度の誤差が含まれているかという点である．

そこで，自由移動間が $t_a^0 = 10$，確率的交通容量の平均が $c_a = 100$，その分散が $\sigma_{aa}^{C} = 100$（変動係数が 0.1）となるリンクを対象に数値実験を行った．このリンクの BPR 関数に関するパラメータ値は，$\gamma_a = 0.48$，$\lambda_a = 2.82$ と仮定した．以上から，分析に必要となる係数は，$\tilde{c}_a = 0.01$，$\sigma_{aa}^{\tilde{C}} = 1.11 \times 10^{-6}$ と計算される（計算の詳細は，内田([3])を参照）．これらの条件から，式(18)に示した n_{aa}^{k} $(k = 1 \sim 3)$ を計算したところ，それぞれ，0.088113，0.001617，0.000002 となり，n_{aa}^{1} に対する n_{aa}^{2}, n_{aa}^{3} の比率は，それぞれ約 1.8%，0.002%となり，確率的移動時間の分散・共分散に関しては，テーラー展開における次数は，$m = 2$ と想定しても十分な精度が得られることがわかる．この特性は，平均移動時間を対象とした場合にも当てはまる．**図 1**，**図 2** は，それぞれ交通量と平均移動時間および確率的移動時間の分散の関係を表わしており，これらの図では，1 次（$m = 1$）と 3 次（$m = 3$）のテーラー展開を施した場合の結果が示されている．これらの図から，確率的移動時間の平均および分散に関しては，現実的な交通量の範囲（たとえば，混雑度が 2 以下となる範囲: $0 \le v_a \le 200$）では，1 次のテーラー展開であっても精度よく推計できることがわかる．

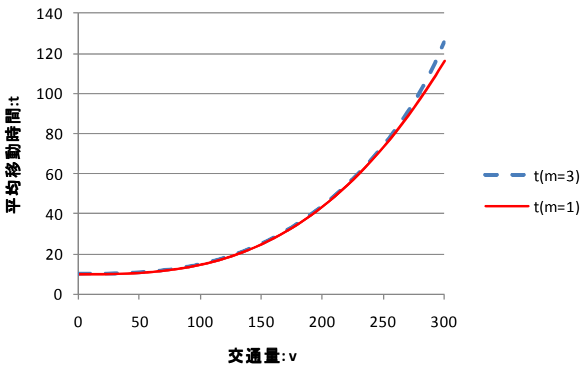

図 1　平均移動時間の比較

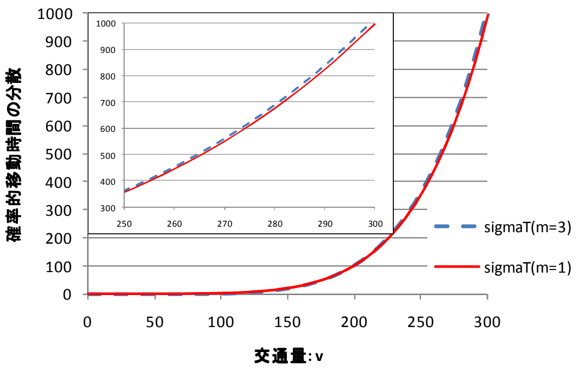

図 2　確率的移動時間の分散の比較

以上の結果から，テーラー展開における次数が移動時間の平均および分散に与える影響は，小さいことが明らかとなった．しかしながら，テーラー展開における次数による影響は，ドライバーの経路選択行動の変化を通して配分交通量にも変化をもたらすことになる．したがって，交通均衡（ドライバーの経路選択行動）を通じた移動時間の平均および分散への影響は，必ずしも小さいとは限らない．そのため，以下ではドライバーの経路選択行動の定式化を行い，その影響を評価することにする．

3.4　経路選択行動

確率的経路移動時間の平均を基準とする経路選択行動は，以下に示す均衡配分モデルとして定式化可能である．

$$\min \sum_{a \in \mathbf{A}} \int_0^{v_a} \tilde{t}_a(x) dx, \tag{19}$$

s.t.

$$v_a = \sum_{od \in \mathbf{\Pi}} \sum_{k \in \mathbf{K}_{od}} \delta_{ak}^{od} \cdot f_k^{od} \, \forall a \in \mathbf{A}, \tag{20}$$

$$\sum_{k \in \mathbf{K}_{od}} f_k^{od} = q^{od} \ \forall od \in \mathbf{\Pi}, \tag{21}$$

$$v_a \geq 0 \ \ \forall a \in \mathbf{A}, \tag{22}$$

$$f_k^{od} \geq 0 \ \forall k \in \mathbf{K}_{od}, \forall od \in \mathbf{\Pi}. \tag{23}$$

q^{od} : 　OD ペア od 間の交通需要.

f_k^{od}: 　OD ペア od 間の k 番目経路交通量.

上記の定式化によって, 利用される経路の平均移動時間は全て等しく, 利用されない経路のものよりも小さいか, せいぜい等しい交通状況が推計されることになる.

4. 数値実験

ここでは，本研究で提案した交通量配分モデルによる解の特性を調べるために，内田([3])で用いたテストネットワーク（**図 3**）を対象に数値実験を行った結果を示す．各リンクの自由移動時間は，実際のリンク長および法定速度を用いて算出した値を用いた．また各リンクの平均交通容量は，一律片側 12,000 (pcu/day) としている．OD 交通量は，OD ペアの組 (1, 54)，(5, 52)，(8, 50)，(33, 39) に対して，それぞれ双方向に 30,000 (pcu/day) 与えた．BPR 関数のパラメータ値は，$(\gamma, \lambda) = (0.48, 2.82)$ とした．

図 4 は，確率的交通容量の変動係数を 0.1 に固定し，さらに，その相関係数 (r) を 0, 0.5, 1.0 と変化させ，テーラー展開における次数が確率的総移動時間の平均 (mean) と標準偏差 (SD) に与える影響を示したものである．テーラー展開における次数の影響は，平均に関しては相対誤差が 1.43%，標準偏差に関しては，相関係数が 1.0 のときに，最大の相対誤差が 0.39%となった．**図 5** は，リンク間の相関係数を 0.5 に固定し，確率的交通容量の変動係数を 0.1, 0.2 と変化させ, テーラー展開における次数が確率的総移動時間の平均と標準偏差に与える影響を示したものである．テーラー展開における次数の影響は，平均，標準偏差に関しては，最大の相対誤差はそれぞれ 6.71%，0.50%となり，これらはいずれも変動係数が 0.2 の場合である．

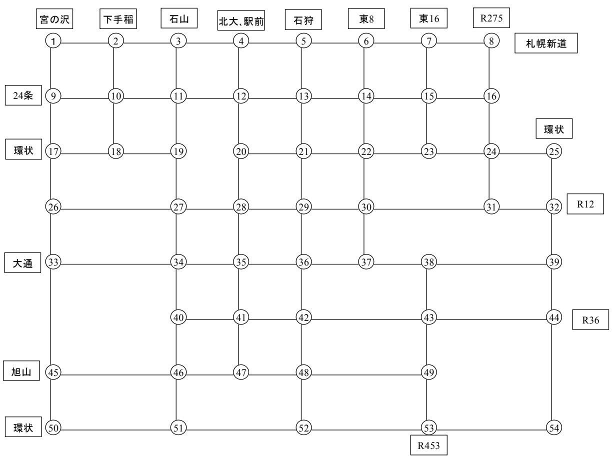

図 3　テストネットワーク

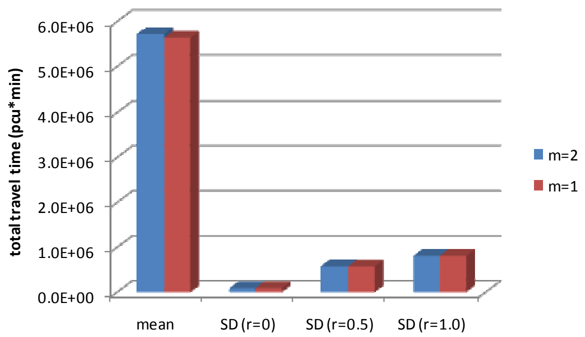

図 4　総移動時間の平均と標準偏差（相関変化）

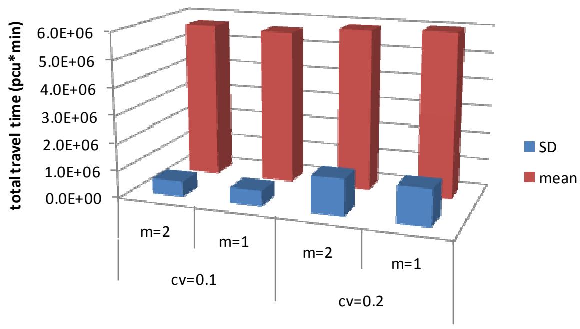

図 5　総移動時間の平均と標準偏差（変動係数変化）

5. 実務における移動時間信頼性評価法の提案

以上の分析から，1 次のテーラー展開を確率的移動時間に適用した場合，ドライバーの経路選択問題は，利用者均衡配分モデルとして定式化されることが明らかとなった．さらに，高次のテーラー展開を適用した結果と比較すると，ある程度の誤差が存在することも明らかとなった．ここでの議論は，確率的移動時間の平均を基準にドライバーが経路選択を行うことを想定しており，ここで計算される確率的移動時間の平均は，適用するテーラー展開の次数の影響を受けることを前提に行われている．すなわち，高い次数のテーラー展開を適用すれば，近似誤差は削減されることになる．

道路投資による効率性評価では，利用者均衡配分が標準的な道路ネットワーク解析法の 1 つとして採用されている．本研究で示した枠組みで考えると，利用者均衡配分は，平均交通容量から計算される確定的移動時間を各ドライバーが最小化するように経路選択行動をとった結果を計算すると捉えることもできる．すなわち，「ドライバーは平均交通容量から計算される移動時間を最小化するように経路選択を行う」と仮定することによって，移動時間信頼性評価において利用者均衡配分を適用することは正当化される．さらに，利用者均衡配分による配分交通量を推計できれば，確率的移動時間に高次のテーラー展開を適用した結果，すなわち，式(16)－(18)を適用することによる，精緻な移動時間信頼性評価が可能となる．

以上をまとめると，本研究で考える実務に適用可能な移動時間信頼性評価法では，交通容量の変動のみをとりあげるが，ドライバーの経路選択行動は確定的利用者均衡配分によって表現する．そうして得られた配分交通量から，移動時間信頼性を評価するものである．移動時間信頼性の計算に際しては，既に配分交通量が得られているため, 適切な次数のテーラー展開を BPR 関数に適用すれば, 近似誤差の小さい推計値を得ることが可能となる．さらにこの部分の計算は，標準的な表計算ソフトによって行うことが可能であり，実規模の道路ネットワークを対象とした場合であっても，容易に行うことができると考えられる．

参考文献

[1] 朝倉康夫 : 道路ネットワークの信頼性研究の課題，交通工学，Vol. 44, No.5，自主研究活動報告 pp. 9-12, 2009.

[2] 牧浩太郎，土谷和之，伊藤智彦，由利昌平：諸外国における道路の所要時間信頼性向上に関する評価手法のレビュー，土木計画学研究・講演集，Vol. 39, 2009.

[3] 内田 賢悦：需要・供給・認知の確率変動を反映した利用者均衡配分，土木学会論文集 D, Vol. 65, No. 3, pp.386-398, 2009.